PART2 関数のグラフの概形

要点整理と公式

要点① 関数のグラフの概形と x 軸に平行な漸近線

関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形をかく。

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

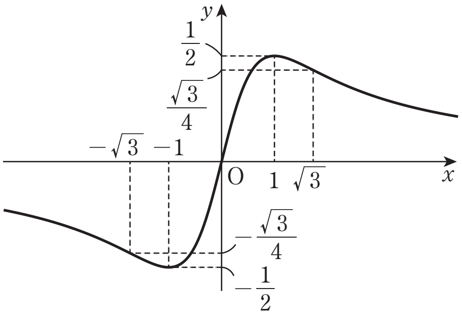
$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$		$-\dfrac{1}{2}$		0		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	

：下に凸で増加　：上に凸で増加　：下に凸で減少　：上に凸で減少

を表す。

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。



ここで

$$\lim_{x\to} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

より，直線 $y=0$，すなわち x 軸はこの曲線の漸近線である。

x 軸に平行な漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ が成り立つとき，

直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ は，$f(-x)=-f(x)$ を満たしているので，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である。

要点 ② 関数のグラフの概形と様々な漸近線

関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ のグラフの概形をかく。

定義域は $x \neq -1$

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘		↘	0	↗

ここで

$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=\qquad$，$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=$

より，直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

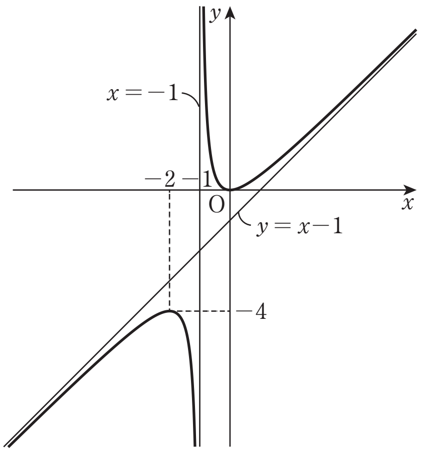
また

$\displaystyle\lim_{x\to}\{f(x)\qquad\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to}\{f(x)\qquad\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}$

より，直線 $y=x-1$ はこの曲線の漸近線である。

よって，グラフの概形は右図。



x 軸に垂直な漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ または

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ が成り立つとき，直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

x 軸に平行でも垂直でもない漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ が成り立つとき，

直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

2 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

Point Pickup

関数のグラフの概形

グラフの概形をかくときは，次のことに注目するとよい。

- 定義域と値域
- 関数の増減と極値
- 凹凸と変曲点
- 漸近線

他に，座標軸との共有点の座標や，対称性(x 軸対称，y 軸対称，原点対称)に注目するとよい。

曲線の漸近線

x 軸に平行な漸近線

$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ ならば直線 $y=a$ は漸近線

x 軸に垂直な漸近線

$\lim_{x\to a+0} f(x)$ または $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が ∞ または $-\infty$ ならば直線 $x=a$ は漸近線

x 軸に平行でも垂直でもない漸近線

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ ならば

直線 $y=ax+b$ は漸近線

第 12 講　PART2 確認問題

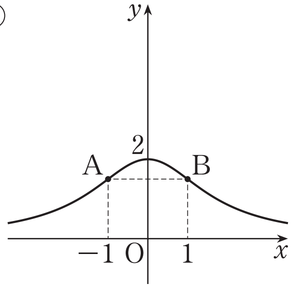
1　関数 $f(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$ において，

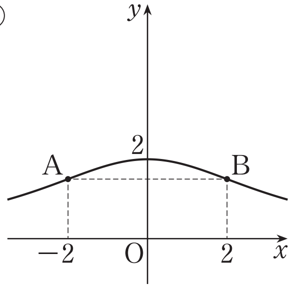
$$f''(x)=\frac{\boxed{\text{アイ}}\left(x^2-\boxed{\text{ウ}}\right)}{(x^2+3)^3}$$

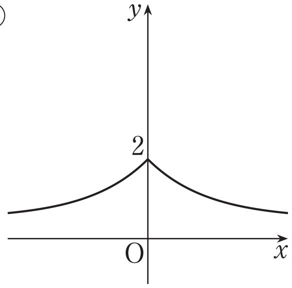
また，$y=f(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{エ}}$ である。

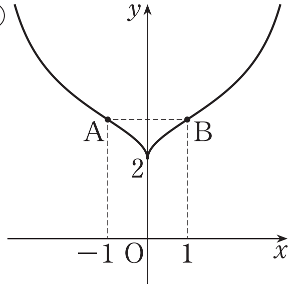
$\boxed{\text{エ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

ただし，図の中の A，B は変曲点である。

①


②


③


④


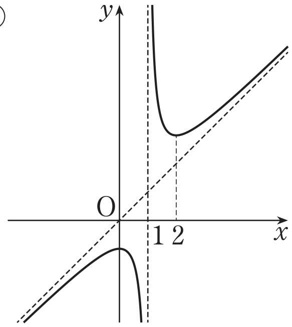
2　関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ において，

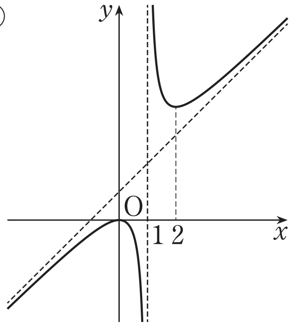
$$f''(x)=\frac{\boxed{\text{オ}}}{(x-1)^3}$$

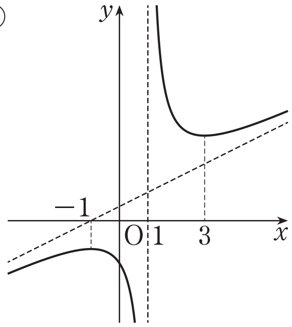
また，$y=f(x)$ の漸近線は，2 直線 $x=\boxed{\text{カ}}$，

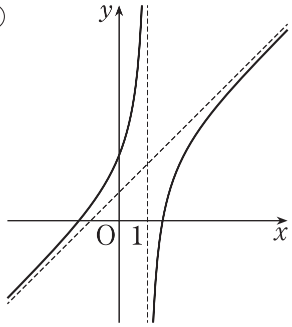
$y=x+\boxed{\text{キ}}$ であり，グラフの概形は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ は下の①～④のうちから選べ。

①


②


③


④


[MEMO]

PART2 関数のグラフの概形

2 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

[解答]

(1) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

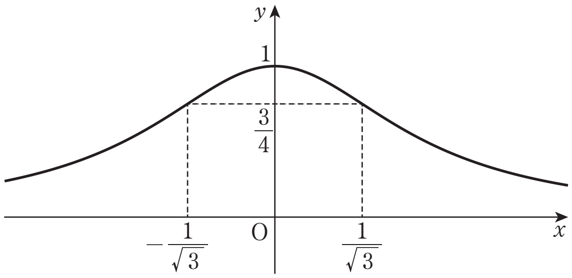
$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{3}{4}$	↗	1	↘	$\dfrac{3}{4}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ より x 軸はこの曲線の漸近線である。

よって，グラフの概形は下図。



(2) 定義域は $x^2-3\neq 0$ より $x\neq\pm\sqrt{3}$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}=x+\frac{3x}{x^2-3}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-18x)(x^2-3)^2-(x^4-9x^2)\cdot 2(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-3)^4}=\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	0	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{9}{2}$	↘	／	↘	0	↘	／	↘	$\frac{9}{2}$	↗

$\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}+0} f(x)=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} f(x)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=-\infty$

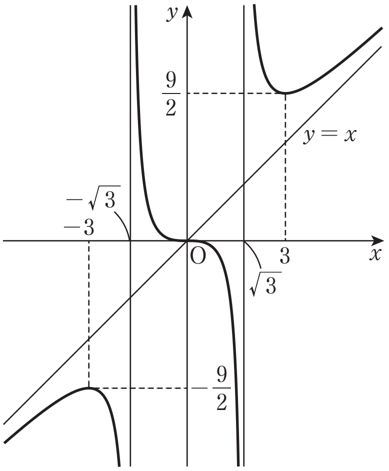
$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0$$

よって，直線 $x=-\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$，$y=x$ は

この曲線の漸近線である。

したがって，グラフの概形は右図。



第12講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：36，ウ：1，エ：①

[解説]

$$f'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{12(x^2+3)^2-12x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=-\frac{12(x^2+3)-48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$=\frac{\mathbf{36}(x^2-\mathbf{1})}{(x^2+3)^3}$$

$$=\frac{36(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

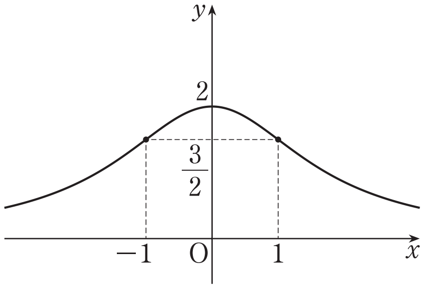
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{3}{2}$	⤻	2	⤵	$\frac{3}{2}$	⤷

[A]

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ より，[B]

x 軸はこの曲線の漸近線である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる。



[A]　$f'(x)$ と $f''(x)$ を含めた増減と凹凸の表をつくる。

[B]　$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

が成り立つとき，

直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

2　**[正解]** オ：2，カ：1，キ：1，ク：②

[解説]

定義域は，$x \neq 1$

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{x-1}$$
$$=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}$$
$$=x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\left\{1-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}'$$ [C]

$$=-\frac{-2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	／	↘	4	↗

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$ より，

直線 $\boldsymbol{x=1}$ はこの曲線の漸近線である。[D]

また，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$ [E]

より，直線 $\boldsymbol{y=x+1}$ はこの曲線の漸近線である。

[C]　$\dfrac{1}{(x-1)^2}$ を $(x-1)^{-2}$ と変形してから微分してもよい。

$$\left\{\frac{1}{(x-1)^2}\right\}'=\{(x-1)^{-2}\}'$$
$$=-2(x-1)^{-3}$$
$$=-\frac{2}{(x-1)^3}$$

[D]　x 軸に垂直な漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ または $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ が

∞ または $-\infty$ ならば，

直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

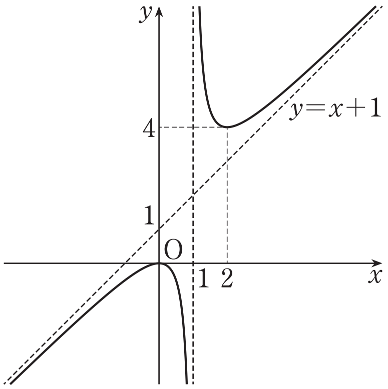
[E]　x 軸に平行でも垂直でもない漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$

が成り立つとき，

直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

したがって，$y=f(x)$ のグラフは，次のように

なる。